Відповіді до завдань II туру

VII обласної Інтернет-олімпіади з математики

2014-2015 н.р.

8 клас

1. **Чи можна в клітинки таблиці 3×3 записати числа 1, -1 і 0 так, щоб всі шість сум чисел по рядках і стовпцях були різними.**

   Розв'язання. Суми чисел в кожному з рядків і в кожному стовпці таблиці в даному випадку можуть приймати тільки цілих значень від -3 до 3. Цілих чисел від -3 до 3 всього 7. Але чи всі вони можуть бути значеннями такої суми?

   Припустимо, що в таблиці маємо суму рівну -3, наприклад в рядку. Її можна отримати, маючи в даному рядку три доданки рівні -1. Тоді в даному випадку сума рівна 3, може зустрітись також лише в рядку. Останеться лише записати 3-й рядок. Але для того, щоб всі три суми в стовпцях були різними, необхідно заповнити третій рядок ***різними*** числами: 1; -1 і 0.

   Одержимо суми в одному із рядків і в одному із стовпців таблиці рівні 0, тобто рівні між собою. Однак за умови це не можливо.

   Можна зробити висновок, якщо в таблиці зустрічається сума рівна -3, то не може зустрітися сума рівна 3. Аналогічно доводимо, що якщо маємо суму, рівну 3, то не може бути суми, рівної -3. Отже, ці суми можуть приймати саме більше 6 різних значень – або від -3 до 2, або від -2 до 3.

   Розглянемо два випадки.

   1) Нехай сума, рівна -3, в таблиці зустрічається , тоді суми в рядках і стовпцях приймають всі цілі значення від -3 до 2. Знайдемо суму цих чисел: -3-2-1+0+1+2=3

   Але, з іншої сторони, ця остання сума рівна подвоєнній сумі всіх чисел таблиці, отже має ділитися на 2. Тому такий випадок не можливий.

   2) Нехай в таблиці зустрічається сума, рівна 3. Аналогічно до попереднього випадку доводимо, що і цей випадок неможливий.

   Відповідь. Неможна.

2. **Всередині трикутника ABC з периметром p взяли точку О.**

   Довести, що $0{,}5p < AO + BO + OC < p$.

Доведення. За нерівністю трикутника $AO+BO>AB$, $CO+BO>CB$, $CO+AO>AC$. Отже, $2AO+2BO+2OC>p$, тобто $0{,}5p<AO+BO+OC$.

Оскільки трикутник *ABC* містить у собі ΔABO,

$AB+BO+OA<AB+CB+CA$, тобто $AO+BO<BC+CA$, аналогічно дістаємо: $AO+CO<BA+CB$, $CO+BO<BA+CA$.

Додаючи три останні нерівності, маємо: $AO+BO+OC<p$.

3. **Чи можна число 456 записати у вигляді добутку декількох натуральних чисел так, щоб сума квадратів всіх цих чисел була також рівна 456?**

Розв'язання. Число 456 розкладемо на прості множники: $456=2^3\cdot 3\cdot 19$. Запишемо рівність $456=2^2+2^2+2^2+3^2+19^2+x$, де x - натуральне число.

Звідси $x=74$. Отримаємо дві рівності

$456=1\cdot 1\cdot \ldots\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 19$ (74 множники, рівних 1),

$456=1^2+1^2+\ldots+1^2+2^2+2^2+2^2+3^2+19^2$ (74 доданки, рівних 1^2).

Відповідь. Можна.

4. Знайти всі пари чисел $(x;y)$, при яких є правильною рівність

$$y^2+\left|17y^3+13x\right|=2xy^2-9x^2-4y^4.$$

Розв'язання. Як видно з умови, ліва частина невід'ємна, а права недодатна:

$$2xy^2-9x^2-4y^4=-x^2+2xy^2-y^4-8x^2-3y^4=$$
$$=-\left(x-y^2\right)^2-8x^2-3y^4.$$

Отже, рівність можлива лише за умови, що ліва і права частини даної рівності дорівнюють 0, звідки $x=y=0$.

Відповідь. $(0;0)$.

5. Вулицями міста рухаються 487 тролейбусів. У кожному з них може знаходитися не більше ніж 70 людей. Крім водія, у тролейбусі завжди їде кондуктор. Довести, що обов'язково знайдуться 8 тролейбусів, у яких їде однакова кількість людей.

Розв'язання. Використаємо метод Діріхле. Найменше в тролейбусі може бути дві людини, а найбільше 70. Тобто маємо 69 «тролейбусів-кліток», у яких їхатиме різна кількість людей(від 2 до 70). А всього в кожний «тролейбус-клітку» буде входити 7 тролейбусів та ще чотири тролейбуси, які стають восьмими у якомусь «тролейбусі-клітці» ($487:69=69\cdot 7+4$).