Відповіді до завдань ІІ туру

VII обласної Інтернет-олімпіади з математики

2014-2015 н.р.

10 клас

1. Житловий квартал забудований дев'яти - та дванадцятиповерховими будинками, причому перших більше ніж других. Якщо число дванадцятиповерхових будинків збільшити в 2 рази, то загальна кількість будинків буде більше за 24, а якщо збільшити в 2 рази кількість дев'ятиповерхових , то загальна кількість стане менше за 27. Скільки яких було побудовано будинків?

Розв'язання

Нехай x та y - відповідно кількості 9-ти та 12-поверхових будинків. Тоді з умов задачі маємо таку систему нерівностей: $\begin{cases} x > y \\ 2y + x > 24 \\ 2x + y < 27 \end{cases}$ Додавши першу нерівність до другої та першу до третьої, отримаємо: $\begin{cases} 2x + y > 24 \\ 2y + x < 27 \end{cases}$ тобто мають місце такі співвідношення: $\begin{cases} 24 < 2x + y < 27 \\ 24 < 2y + x < 27 \end{cases}$. Ще раз додамо отримані нерівності і після спрощення матимемо: $16 < x + y < 18$

Звідси, оскільки $x + y$ ціле, то $x + y = 17 \Rightarrow x = 17 - y$

Підставимо це в нерівність $24 < 2y + x < 27$

Таким чином матимемо: $24 < 2y + 17 - y < 27$ або ж $7 < y < 10$

Тобто y може набувати значень 8 або 9. Якщо $y = 8$ то $x = 9$ і всі умови задачі виконані

Якщо ж $y = 9$ то $x = 8$ і не виконана умова $x > y$.

Відповідь. 9 дев'яти та 8 12-поверхових будинків.

2.Знайти всі записи числа *1* у вигляді суми $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, де $x, y, z \in N$.

Розв'язання. Очевидно, що умова задачі виконується при $x = y = z = 3$, тобто $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, і жодна із змінних x, y, z не може дорівнювати одиниці.

Розглянемо рівняння:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, звідки $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{x-1}{x}$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{x}{x-1}}$, де $\frac{x}{x-1} \in N$.

При цьому $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$.

Умова $\frac{x}{x-1} \in N$ буде виконуватися якщо *x-1=1*, тобто *x=2*.

Рівняння $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ при *x=2* набуде вигляду $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$. Звідси $\frac{1}{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}$, $\frac{1}{y}=\frac{z-2}{2z}$, $\frac{1}{y}=\frac{1}{\frac{2z}{z-2}}$, де $\frac{2z}{z-2} \in N$.

При цьому $\frac{2z}{z-2}=2+\frac{4}{z-2}$.

Умова $\frac{2z}{z-2} \in N$ буде виконуватись, якщо *z-2=1* або *z-2=2*, або *z-2=4*. Тобто *z=3* або *z=4*, або *z=6* (випадки *z-2=-1*, *z=1* та *z-2=-2*, *z=0*, та *z-2=-4*, *z=-2* не задовольняють умову задачі).

При *z=3*, *y=6;*

при *z=4*, *y=4;*

При *z=6*, *y=3;* (перший і третій випадки симетричні).

Отже, $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

Відповідь: $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$.

2. Розв'яжіть рівняння: $[x]\{x\}+x=2\{x\}+10$

Розв'язання. Як відомо, $x=[x]+\{x\}$.

Тоді дане рівняння можна представити у вигляді:

$[x]\{x\}+[x]+\{x\}=2\{x\}+10$;

$[x]=\frac{10+\{x\}}{\{x\}+1}=1+\frac{9}{\{x\}+1}$;

Звідки слідує , що число $\frac{9}{\{x\}+1}$ - ціле, і враховуючи, що $0 \le \{x\} < 1$, то $5 \le \frac{9}{\{x\}+1} \le 9$.

Нехай $\frac{9}{\{x\}+1}=5$, тоді $\{x\}+1=\frac{9}{5}$, $\{x\}=\frac{4}{5}$, $[x]=1+5=6$, тому x=$6\frac{4}{5}$.

Нехай $\frac{9}{\{x\}+1}=6$, тоді $\{x\}+1=\frac{9}{6}$, $\{x\}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $[x]=1+6=7$, тому x=$7\frac{1}{2}$.

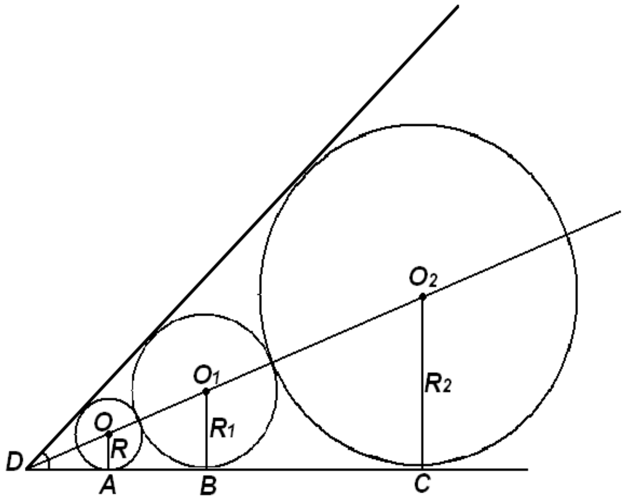
Нехай $\frac{9}{\{x\}+1}=7$, тоді $\{x\}+1=\frac{9}{7}$, $\{x\}=\frac{2}{7}$, $[x]=1+7=8$, тому x=$8\frac{2}{7}$.

Нехай $\frac{9}{\{x\}+1}=8$, тоді $\{x\}+1=\frac{9}{8}$, $\{x\}=\frac{1}{8}$, $[x]=1+8=9$, тому x=$9\frac{1}{8}$.

Нехай $\frac{9}{\{x\}+1}=9$, тоді $\{x\}+1=\frac{9}{9}$, $\{x\}=0$, $[x]=1+9=10$, тому x=10.

Відповідь: $6\frac{4}{5}$, $7\frac{1}{2}$, $8\frac{2}{7}$, $9\frac{1}{8}$, 10.

4. В кут, градусна міра якого 60^0, вписано три кола так, що кожне наступне, починаючи з другого, дотикається до попереднього. Знайдіть відношення суми площ усіх трьох кругів до площі найменшого з них.



Проведемо бісектрису кута. Знаємо, що центри кіл знаходяться на даній бісектрисі.

Розглянемо $\Delta AOD(\angle A = 90°)$:

$\angle ADO = 30°$, $OD = \dfrac{AO}{\sin 30°} = \dfrac{R}{0.5} = 2R.$

Бачимо, що $\Delta AOD \sim \Delta BO_1D \sim \Delta CO_2D$, за двома кутами.

Звідси, $\dfrac{OA}{O_1B} = \dfrac{DO}{DO_1}$, $\dfrac{R}{R_1} = \dfrac{2R}{3R + R_1}$ => $2RR_1 = 3R^2 + RR_1$, $RR_1 = 3R^2$, $R_1 = 3R$.

$\dfrac{OA}{O_2B} = \dfrac{DO}{DO_2}$, $\dfrac{R}{R_2} = \dfrac{2R}{9R + R_2}$ => $2RR_2 = 9R^2 + RR_2$, $RR_2 = 9R^2$, $R_2 = 9R$.

$S_1 = 9\pi R^2$, $S_2 = 81\pi R^2$, $S = \pi R^2$.

$\dfrac{S1 + S2 + S3}{S1} = \dfrac{9\pi R^2 + 81\pi R^2 + \pi R^2}{\pi R^2} = \dfrac{91}{1}.$

Відповідь: 91.

5. Знайти всі функції $f: \quad R \to R$, що задовольняють рівняння $f(x) - 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2 - x^2}{x}$.

Вказівка:

Підставимо $x = \dfrac{1}{x}$. Тоді $f\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2f(x) = \dfrac{2 - \left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{\dfrac{1}{x}} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2f(x) + \dfrac{2x^2 - 1}{x}$.

Підставивши знайдене значення $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ у перше рівняння, отримаємо, що $f(x) - 2\left(2f(x) + \dfrac{2x^2 - 1}{x}\right) = \dfrac{2 - x^2}{x} \Rightarrow f(x) = -x$. Перевірка показує, що дана функція є розв‘язком.

Відповідь: $f(x) = -x$.