

Завдання І туру

VII Інтернет-олімпіади з математики

2014-2015 н.р.

9 клас

1. Розв'яжіть рівняння: $[20x] + 14[x] = 2014$, де $[x]$ - ціла частина числа x .
2. Автослюсар отримав завдання на виготовлення кількох комплектів деталей для восьмициліндрових автомобільних двигунів. Слюсар підрахував, що коли йому вдасться підвищити продуктивність праці на 0,1 дет/год, то він зможе виконати завдання на 12 год раніше строку, а якщо ще на 0,5 дет./год, то виконає завдання на 36 год раніше строку. Скільки деталей потрібно виготовити слюсарю?

3. Розв'яжіть систему рівнянь, якщо y та z – прості числа:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}, \\ x = yz. \end{cases}$$

4. Нехай a , b , c – сторони трикутника. Доведіть нерівність:

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3$$

5. Є ланцюжок з n ($n > 6$) сосисок. Два коти по черзі перегризають по одній перемичці між сосисками і з'їдають утворені одинарні сосиски. Виграє той кіт, який з'їсть більше сосисок. Опишіть виграшну тактику кота-переможця.

6. На дошці записані числа 1001^2 , 1002^2 , 1003^2 , ..., 2013^2 . На кожному кроці дозволяється стерти будь-які три числа a , b , c і записати замість них число $\frac{a}{3}$ ($a \leq b \leq c$). Доведіть, що коли після серії таких операцій на дошці залишиться лише одне число, то воно буде менше за 1992.

7. В деякій точці круглого більярду радіусу R на відстані a від його центра знаходиться кулька. В яку точку борту потрібно влучити кулькою, щоб вона двічі відбившись від борту, повернувся в початкову точку? Розмірами кульки знехтувати.

8. Для всіх a розв'яжіть рівняння в множині дійсних чисел:

$$(1 + x + x^2)^2 = \frac{a+1}{a-1}(1 + x^2 + x^4).$$